	Рекомендация KOOMET	COOMET R/GM/35:2022
	Выражение расширенной неопределенности измерений (метод эксцессов)	
Одобрена на 18-м заседании ТК 1.1 «Общие вопросы измерений» (5 октября 2020), утверждена на 33-м заседании Комитета KOOMET (25-27 октября 2022, онлайн)		

1. ВВЕДЕНИЕ

В 1993 году было обнародовано «Руководство по выражению неопределенности измерений» (GUM) [1], в основу которого были положены: закон распространения неопределенности, приводящий при нелинейных модельных уравнениях к смещению оценок числовых значений измеряемой величины и ее неопределенности; центральная предельная теорема теории вероятности с аппаратом числа степеней свободы, предопределяющие недостоверность оценок расширенной неопределенности из-за игнорирования влияния законов распределения входных величин на закон распределения измеряемой величины.

Избавиться от указанных недостатков позволило введение приложений 1 [2] и 2 [3] к GUM, основанных на методе Монте-Карло (ММК). Оценки неопределенности измерений, получаемые при использовании ММК, соответствуют байесовским оценкам, однако численно отличаются от оценок, получаемых с использованием подхода GUM. Следует отметить, что прямому использованию ММК для оценивания неопределенности измерений в испытательных и калибровочных лабораториях, аккредитованных на соответствие требованиям стандарта ISO/IEC 17025:2017 [4], мешают следующие факторы:

- отсутствие специализированных сертифицированных программных средств для оценивания неопределенности измерений на основе ММК;
- невозможность получения существующими программными средствами, реализующими ММК, бюджета неопределенности измерений;
- невозможность документирования пошаговой процедуры оценивания неопределенности измерений на основе ММК.

В настоящем документе изложена процедура оценивания неопределенности измерений, основанная на методе эксцессов, методе конечных приращений и законе распространения расширенной неопределенности, позволяющих обеспечить получение оценок числовых значений и неопределенности результата измерений, сопоставимых с оценками, получаемыми при использовании ММК.

2. УСЛОВИЯ ПРИМЕНЕНИЯ

Процедуры, изложенные в данной рекомендации, применимы для оценивания неопределенности измерений, когда выполняются следующие условия:

1. Модель измерения – действительная, явная, одномерная, линейная или допускающая линеаризацию.
2. Законы распределения вероятностей входных величин – симметричны.
3. Закон распределения генеральной совокупности наблюдаемого рассеяния показаний средств измерения (СИ) – нормальный.

3. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

- c_i – коэффициент чувствительности;
- c_{ii} – частная производная второго порядка от Y по X_i , которая оценена при $X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N$;
- c_{ij} – смешанная частная производная второго порядка от Y по X_i, X_j которая оценена при $X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N$;
- $\text{cov}(x_i, x_j)$ – ковариация результатов измерения i -й и j -й входных величин;
- k_p – коэффициент охвата для уровня доверия p ;
- n_i – число многократных измерений i -й входной величины;
- N – число входных величин в модели измерений;
- p – уровень доверия;
- r_{kl} – коэффициент корреляции между результатами измерений X_k, X_l ;
- s_i – стандартное отклонение i -й входной величины;
- $s(\bar{x}_i)$ – стандартное отклонение среднего арифметического i -й входной величины;
- $u(x_i) = u_i$ – стандартная неопределенность i -й входной величины;
- $u(y)$ – стандартная неопределенность измеряемой величины;
- U – расширенная неопределенность измеряемой величины;
- U_A – расширенная неопределенность типа А измеряемой величины;
- U_B – расширенная неопределенность типа В измеряемой величины;
- X_i – i -я входная величина модели измерений;
- x_i – числовое значение i -й входной величины;
- x_{ir} – r -е повторное показание при измерении i -й входной величины;
- Y – измеряемая (выходная) величина модели измерений;
- y – числовое значение измеряемой величины;
- α – параметр трапецевидного закона распределения;
- β – относительное отклонение неточно заданных границ равномерного распределения;
- η_i – эксцесс i -й входной величины;
- η – эксцесс измеряемой величины;
- γ_i – коэффициент для пересчета границ распределения i -й входной величины в стандартную неопределенность;
- δ_i – поправки на i -ю влияющую величину;
- $\Delta(y)$ – смещение измеряемой величины;
- $\Delta(u^2)$ – смещение дисперсии измеряемой величины;
- ε_i – поправка на i -ю случайную погрешность измерения;
- θ_i – граница распределения i -й входной величины;
- ν – число степеней свободы распределения Стьюдента.

4. ОБЩИЕ ПОЛОЖЕНИЯ

4.1. Модель измерения

Действительная, явная, одномерная модель измерений записывается в виде:

$$Y = f(X_1, X_2, \dots, X_N), \quad (1)$$

где Y – измеряемая величина; X_1, X_2, \dots, X_N – входные величины.

Входные величины можно классифицировать как:

- величины, значения и неопределенности которых определяются непосредственно в данном измерении и могут быть получены из единичного показания средств измерений (СИ) или повторяющихся показаний;
- поправки на показания СИ и поправки на влияющие входные величины, такие как температура окружающей среды, барометрическое давление, влажность и др.;
- величины, значения и неопределенности которых введены в измерения из внешних источников, таких как откалиброванные эталоны, сертифицированные стандартные образцы и данные, указанные в справочниках.

4.2. Оценивание входных величин, их стандартных неопределенностей и ковариаций

Если непосредственно в данном измерении получено единичное показание x_i СИ входной величины X_i , то это показание и является значением этой величины.

Инструментальную стандартную неопределенность этой величины получают из информации, взятой из сертификата калибровки СИ – расширенной инструментальной неопределенности U_{pi} и коэффициента охвата k_{pi} :

$$u(x_i) = \frac{U_{pi}}{k_{pi}}, \quad (2)$$

где p – уровень доверия, который обычно составляет «приблизительно 0,95», то есть точно 0,9545. Для этой вероятности информацию о плотности распределения вероятности (PDF), которая приписывается этой входной величине, можно получить из табл. 1.

Таблица 1

Коэффициенты охвата для уровня доверия $p = 0,9545$ и соответствующие им PDF*

	1,411	1,653	1,653...1,927	1,927	2	>2
DF	Арксинусный	Равномерный	Трапецевидный	Треугольный	Нормальный	Стьюдента

**ПРИМЕЧАНИЕ. Номограммы для нахождения параметра α трапецевидного закона распределения и эффективного числа степеней свободы ν для закона распределения Стьюдента для вероятности 0,9545 приведены в приложении А.*

Если имеется априорная информация об изменчивости единичного показания x_i СИ входной величины X_i , характеризующейся стандартным отклонением s_i , в модель измерения необходимо добавить поправку ε_i на случайную погрешность, значения которой $\hat{\varepsilon}_i = 0$, а стандартная неопределенность $u(\varepsilon_i)$ равна $s_i \sqrt{\nu_i / (\nu_i - 2)}$, где ν_i – число степеней свободы, приписываемых i -й поправке.

Если непосредственно в данном измерении получены n_i повторяющихся показаний СИ $x_{i1}, x_{i2}, \dots, x_{in}$, то оценкой x_i данной величины X_i является их среднее арифметическое:

$$x_i = \bar{x}_i = \frac{1}{n_i} \sum_{r=1}^{n_i} x_{ir} . \quad (3)$$

В этом случае в модель измерения добавляется поправка ε_i на случайную погрешность, значение которой $\hat{\varepsilon}_i = 0$, а стандартная неопределенность определяется по формуле:

$$u(\varepsilon_i) = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-1)} \sum_{r=1}^{n_i} (x_{i,r} - \bar{x}_i)^2} \sqrt{\frac{n_i-1}{n_i-3}} = \sqrt{\frac{1}{n_i(n_i-3)} \sum_{r=1}^{n_i} (x_{i,r} - \bar{x}_i)^2} . \quad (4)$$

Этой поправке в [5] приписывается несмещенный масштабированный закон распределения Стьюдента с числом степеней свободы $\nu_i = n_i - 1$. Оценки стандартных неопределенностей (4) поправок ε_i имеют смысл при $n_i \geq 4$ и справедливы лишь для нормально распределенных результатов многократных измерений [5].

Если между измерениями двух входных величин X_k, X_l наблюдается корреляция, то оценка их ковариации находится по формуле:

$$\text{cov}(x_k, x_l) = r_{kl} u(\varepsilon_k) u(\varepsilon_l) , \quad (5)$$

где r_{kl} - оценка коэффициента корреляции, производимая по формуле:

$$r_{kl} = \frac{\sum_{r=1}^n (x_{kr} - \bar{x}_k)(x_{lr} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{r=1}^n (x_{kr} - \bar{x}_k)^2 \sum_{r=1}^n (x_{lr} - \bar{x}_l)^2}} . \quad (6)$$

Поправки на влияющие входные величины δ_i , имеющие оцененное значение $\hat{\delta}_i$ и стандартную неопределенность u_i вводятся путем аддитивной или мультипликативной коррекции соответствующей входной или измеряемой величин.

Если входная величина X_i задана границами ее изменчивости $\pm\theta_i$, то ее стандартную неопределенность находят по формуле:

$$u_i = \frac{\theta_i}{\gamma_i} , \quad (7)$$

где γ_i - коэффициент, определяемый PDF X_i внутри границ ее изменчивости (табл. 2).

Таблица 2

Коэффициенты γ для пересчета границ распределения входной величины $\pm\theta_i$ в стандартную неопределенность

PDF	Арсинусный	Равномерный	Треугольный
γ	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	$\sqrt{6}$

Величинам X_i , которые введены в измерения из внешних источников, таких как откалиброванные эталоны, сертифицированные стандартные образцы и данные,

указанные в справочниках, приписывают значения x_i и стандартные неопределенности u_i на основе априорной информации, полученной из этих источников.

Всем входным величинам априорно приписывают PDF, которые характеризуются эксцессами η_i , значения которых приведены в табл. 3.

Обоснование выбора закона распределения входной величины на основе доступной информации приведено в [2].

Таблица 3

Эксцессы законов распределения входных величин

Закон распределения	Значение эксцесса
Арсинусный	-1,5
Равномерный	-1,2
Равномерный с неточно заданными границами (β – относительное отклонение границ равномерного распределения)	$-1,2 \left[1 + \frac{3\beta^2(\beta^2 + 6)}{(\beta^2 + 3)^2} \right]$
Трапецевидный с параметром α	$-1,2(1 + \alpha^4)/(1 + \alpha^2)^2$
Треугольный	-0,6
Нормальный	0
Стьюдента с числом степеней свободы ν	$6/(\nu - 4)$

4.3. Вычисление числового значения результата измерения

Оценку измеряемой величины y в [1] вычисляют путем подстановки в (1) полученных оценок входных величин x_1, x_2, \dots, x_N :

$$y = f(x_1, x_2, \dots, x_N). \quad (8)$$

При нелинейной модели такой способ оценивания дает несмещенный результат только при отсутствии неопределенности оценок входных величин. При наличии значительных неопределенностей входных величин указанный способ приводит к смещению оценки измеряемой величины [6]. Устранить этот недостаток можно путем введения поправки к числовому значению измеряемой величины. Порядок вычисления поправки, критерий ее значимости и способ получения несмещенной оценки числового значения результата измерения приведен в приложении В.

4.4. Вычисление стандартной неопределенности измеряемой величины

Вычисление стандартной неопределенности измеряемой величины осуществляется в GUM методом суммирования дисперсий и ковариаций.

При отсутствии корреляции между результатами измерения входных величин стандартную неопределенность измеряемой величины находят по формуле:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u_i^2}, \quad (9)$$

где $c_i = \partial y / \partial x_i$ – коэффициенты чувствительности, которые представляют собою соответствующие частные производные от Y по X_i , которые оценены при $X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N$.

При наличии корреляции между k -й и l -й входными величинами стандартную неопределенность измеряемой величины $u(y)$ находят из выражения:

$$u(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u_i^2 + 2c_l c_k \text{cov}(x_k, x_l)} . \quad (10)$$

Такой способ оценивания дает несмещенный результат только при линейной модели. При нелинейной модели при наличии значительных неопределенностей входных величин указанный способ приводит к смещению оценки стандартной неопределенности измеряемой величины [7], устранить которую можно путем введения поправки. Порядок вычисления поправки, оценивания ее значимости и получения несмещенной оценки стандартной неопределенности результата измерения приведен в приложении С.

5. ВЫЧИСЛЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ

5.1. Метод эксцессов

Расширенная неопределенность измерений вычисляется этим методом по формуле:

$$U = k_p \cdot u(y) , \quad (11)$$

где k_p – коэффициент охвата, который для уровня доверия 0,95 рассчитывают по формуле [8]:

$$k_{0,95} = \begin{cases} 0,1085\eta^3 + 0,1\eta + 1,96, & \text{при } \eta < 0; \\ t_{0,95;(6/\eta+4)} \cdot \sqrt{\frac{3+\eta}{3+2\eta}}, & \text{при } \eta \geq 0, \end{cases} \quad (12)$$

а для уровня доверия 0,9545 – по формуле [8]:

$$k_{0,9545} = \begin{cases} 0,12\eta^3 + 0,1\eta + 2, & \text{при } \eta < 0; \\ t_{0,9455;(6/\eta+4)} \cdot \sqrt{\frac{3+\eta}{3+2\eta}}, & \text{при } \eta \geq 0, \end{cases} \quad (13)$$

Следует отметить, что при $\eta \geq 0$ с отклонением не более 2 % можно принять $k_{0,95} = 1,96$ и $k_{0,9545} = 2$.

В выражениях (12-13) η – эксцесс распределения измеряемой величины, определяемый при отсутствии корреляции между результатами измерений входных величин как:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1}^n \eta_i c_i^4 u_i^4}{u^4(y)} . \quad (14)$$

причем η_i – эксцессы входных величин, взятые из табл. 4.1; $u(y)$ – стандартная неопределенность измеряемой величины, определяемая по формуле (9).

При наличии корреляции между результатами измерений k -й и l -й входных величин, эксцесс распределения измеряемой величины следует вычислять по формуле [9]:

$$\eta = \frac{\sum_{i=1; i \neq k; i \neq l}^N \eta_i c_i^4 u_i^4 + \eta_{kl} [c_k^2 u_k^2 + 2c_k c_l \text{cov}(x_k, x_l) + c_l^2 u_l^2]^2}{u^4(y)} , \quad (15)$$

где $u(y)$ – стандартная неопределенность измеряемой величины, определяемая по формуле (10); $\eta_{kl} = \eta_k = \eta_l = 6/(n-5)$ – эксцесс k -й (l -й) входной величины.

Все сведения о входных и измеряемой величинах, полученные выше, сведены в табл. 4, представляющую собой бюджет неопределенности.

Отклонение оценок расширенной неопределенности, полученные методом эксцессов от оценок, полученных с помощью ММК, не превышает $\pm 2,5\%$.

Следует отметить, что выполнение неравенства о наличии сдвига измеряемой величины (В7) свидетельствует об асимметрии ее закона распределения. В этом случае для нахождения расширенной неопределенности нужно использовать ММК.

Т.к. эксцесс распределения Стьюдента существует при числе степеней свободы больше 4, то метод эксцессов применим для числа повторных измерений входных величин более 5. При меньшем числе повторных измерений для расчета расширенной неопределенности следует применять закон распространения расширенной неопределенности [10], описанный в подразделе 5.2.

Таблица 4

Бюджет неопределенности измерений для метода эксцессов

Входные величины	Значения входных величин	Стандартные неопределенности входных величин	Эксцессы входных величин	Коэффициенты чувствительности	Вклады неопределенности
X_1	x_1	$u(x_1)$	η_1	c_1	$c_1 u(x_1)$
X_2	x_2	$u(x_2)$	η_2	c_2	$c_2 u(x_2)$
...
X_N	x_N	$u(x_N)$	η_N	c_N	$c_N u(x_N)$
Измеряемая величина	Значение измеряемой величины	Стандартная неопределенность измеряемой величины	Эксцесс измеряемой величины	Коэффициент охвата	Расширенная неопределенность
Y	y	$u(y)$	η	k	U

5.2. Закон распространения расширенной неопределенности

Закон распространения расширенной неопределенности (ЗРРН) применяется для оценивания расширенной неопределенности при числе повторных наблюдений входных величин $n \geq 4$.

Выражение для вычисления расширенной неопределенности для вероятности 0,95 в этом случае имеет вид [10]:

$$U = \sqrt{U_A^2 + U_B^2}, \quad (16)$$

где $U_A(y)$, $U_B(y)$ – расширенные неопределенностей типа A и B измеряемой величины, соответственно.

Расширенная неопределенность типа A вычисляется по формуле:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{t_{(0,95;v_i)}^2 c_i^2 u^2(\varepsilon_i)(n_i - 3)}{n_i - 1}}, \quad (17)$$

где $u(\varepsilon_i)$ определяется выражением (4); $t_{(0,95;v_i)}^2$ – коэффициент Стьюдента для вероятности 0,95 и числа степеней свободы $v_i = n_i - 1$.

Стандартная неопределенность поправки на случайную погрешность измеряемой величины определяется по формуле:

$$u(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(\varepsilon_i)}, \quad (18)$$

Расширенная неопределенность типа B вычисляется по формуле:

$$U_B = k_B \cdot u_B(y), \quad (19)$$

где $u_B(y)$ – стандартная неопределенность типа B измеряемой величины

$$u_B(y) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u_B^2(x_i)}, \quad (20)$$

k_B – коэффициент охвата типа B , вычисляемый методом эксцессов по формуле:

$$k_B = 0,1085\eta_B^3 + 0,1\eta_B + 1,96. \quad (21)$$

Здесь η_B – эксцесс распределения композиции составляющих измеряемой величины, оцениваемых по типу B , равный:

$$\eta_B = \frac{\sum_{i=1}^N \eta_B(x_i) c_i^4 u_B^4(x_i)}{u_B^4(y)}. \quad (22)$$

где $\eta_B(x_i)$ – эксцесс распределения типа B i -й входной величины.

Оценку суммарной стандартной неопределенности измеряемой величины находят по формуле:

$$u(y) = \sqrt{[u(\varepsilon)]^2 + [u_B(y)]^2}. \quad (23)$$

При реализации закона распространения расширенной неопределенности необходимо составить два бюджета неопределенности: для составляющих, оцененных по типу B (табл. 5) и для поправок на случайную погрешность (табл. 6).

Таблица 5
Бюджет неопределенности измерений для составляющих типа B

Входные величины	Значения входных величин	Стандартные неопределенности входных величин	Эксцессы входных величин	Коэффициенты чувствительности	Вклады неопределенности
X_1	x_1	$u_B(x_1)$	η_1	c_1	$c_1 u_B(x_1)$
X_2	x_2	$u_B(x_2)$	η_2	c_2	$c_2 u_B(x_2)$
...
X_N	x_N	$u_B(x_N)$	η_N	c_N	$c_N u_B(x_N)$
Измеряемая величина	Значение измеряемой величины	Стандартная неопределенность измеряемой величины типа B	Эксцесс измеряемой величины типа B	Коэффициент охвата типа B	Расширенная неопределенность
Y	y	$u_B(y)$	η_B	k_B	U_B

Таблица 6
Бюджет неопределенности измерений для поправок на случайную погрешность

Входные величины	Значения входных величин	Стандартная неопределенность поправок к входным величинам	Числа степеней свободы входных величин	Коэффициенты чувствительности	Вклады неопределенности поправок
ε_1	0	$u(\varepsilon_1)$	ν_1	c_1	$c_1 u(\varepsilon_1)$

ε_2	0	$u(\varepsilon_2)$	v_2	c_2	$c_2 u(\varepsilon_2)$
...
ε_N	0	$u(\varepsilon_N)$	v_N	c_N	$c_N u(\varepsilon_N)$
Измеряемая величина	Значение измеряемой величины	Стандартная неопределенность поправки к измеряемой величине			Расширенная неопределенность типа A измеряемой величины
ε	0	$u(\varepsilon)$			U_A

Если между измерениями двух входных величин X_k , X_l наблюдается корреляция, то стандартная неопределенность поправки на случайную погрешность измеряемой величины определяется по формуле [10]:

$$u(\varepsilon) = \sqrt{\sum_{i=1}^N c_i^2 u^2(\varepsilon_i) + 2c_k c_l \text{cov}(x_k, x_l)} , \quad (24)$$

а расширенная неопределенность типа A вычисляется как:

$$U_A = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{t_{(0,95;v_i)}^2 c_i^2 u^2(\varepsilon_i)(n_i - 3)}{n_i - 1} + 2t_{(0,95;v)}^2 c_k c_l \text{cov}(x_k, x_l) \frac{(n - 3)}{(n - 1)}} , \quad (25)$$

где $n_k = n_l = n$.

Отклонение оценок расширенной неопределенности, полученных этим методом от оценок, полученных с помощью ММК, не превышает $\pm 4,5\%$.

Перечень литературы с примерами оценивания неопределенности измерений обоими методами приведен в приложении Е.

Нахождение параметров распределений по коэффициенту охвата

Параметр $\alpha = u_2/u_1$ трапецевидного закона распределения со стандартной неопределенностью u_{trap} где $u_1 = u_{trap}/\sqrt{1+\alpha^2}$, $u_2 = \alpha u_1$ – стандартные неопределенности двух равномерных законов, из которых состоит трапецевидный, находится из рис. А1.

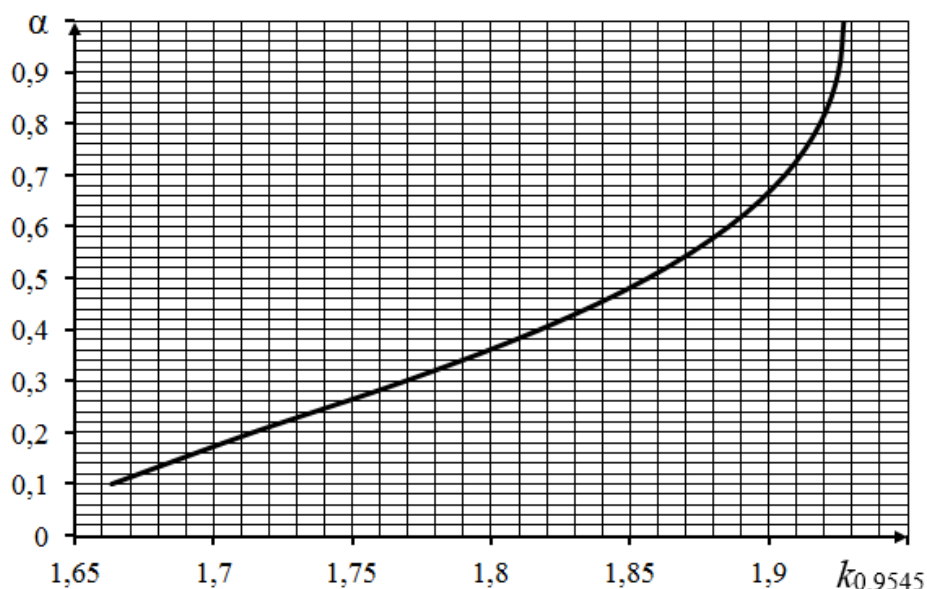


Рисунок А1 – Номограмма для нахождения параметра $\alpha = u_2/u_1$ трапецевидного закона распределения, по значению $k_{0,9545}$

Число степеней свободы ν закона распределения Стьюдента для вероятности 0,9545 находится из рис. А2.

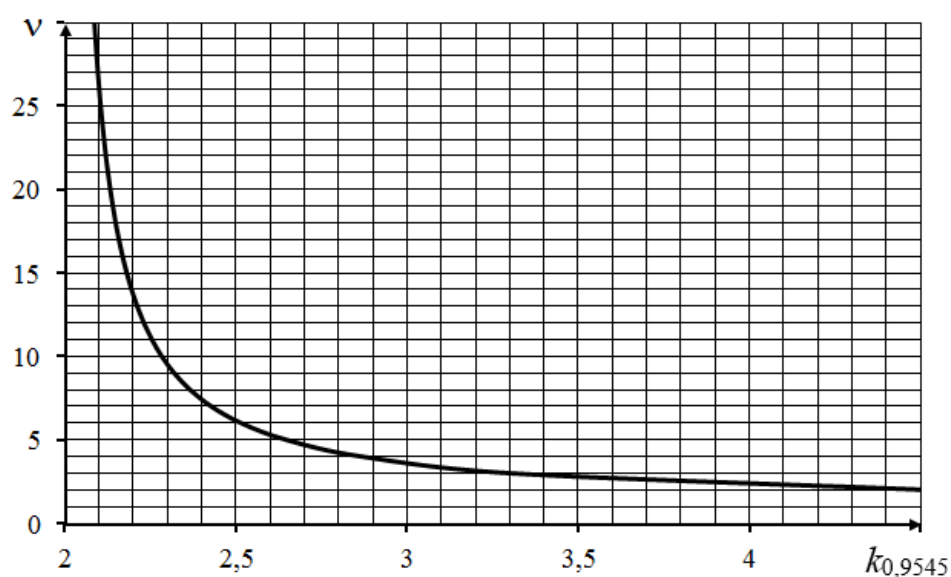


Рисунок А2 – Номограмма для нахождения эффективного числа степеней свободы ν закона распределения Стьюдента по коэффициенту охвата $k_{0,9545}$

Учет смещения числового значения измеряемой величины при нелинейном модельном уравнении

Выражение для оценки смещения оценки измеряемой величины при отсутствии корреляции между входными величинами имеет вид [6]:

$$\Delta_y = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_{ii} u_i^2, \quad (B1)$$

где $c_{ii} = \partial^2 y / \partial x_i^2$ – частная производная второго порядка от Y по X_i которая оценена при $X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N$; u_i – стандартная неопределенность X_i .

Величина смещения может быть вычислена методом частных приращений [6] по формуле:

$$\Delta_y = \sum_{j=1}^N \left\{ \frac{f[x_1, \dots, (x_j + u_j), \dots, x_N] + f[x_1, \dots, (x_j - u_j), \dots, x_N]}{2} - f[x_1, x_2, \dots, x_N] \right\}. \quad (B2)$$

При наличии корреляции между k -й и l -й входными величинами выражение для величины смещения оценки измеряемой величины имеет вид

$$\Delta(y) = -\left[\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N c_{ij} u_j^2 + c_{kl} r_{kl} u_k u_l \right], \quad (B3)$$

где $c_{kl} = \partial^2 y / (\partial x_k \partial x_l)$ – смешанная частная производная второго порядка от Y по X_k, X_l которая оценена при $X_1 = x_1, \dots, X_N = x_N$; r_{kl} – коэффициент корреляции между результатами измерений X_k, X_l , вычисляемый по формуле:

$$r_{kl} = \frac{\sum_{r=1}^n (x_{kr} - \bar{x}_k)(x_{lr} - \bar{x}_l)}{\sqrt{\sum_{r=1}^n (x_{kr} - \bar{x}_k)^2 \sum_{r=1}^n (x_{lr} - \bar{x}_l)^2}}; \quad (B4)$$

u_k, u_l – стандартные неопределенности, вызванные наблюдаемым разбросом показаний k -й и l -й входных величин, причем:

$$u_k = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s_k}{\sqrt{n}}, \quad (B5)$$

$$u_l = \sqrt{\frac{n-1}{n-3}} \frac{s_l}{\sqrt{n}}. \quad (B6)$$

Полученное значение смещения $\Delta(y)$ сравнивают со значением несмещенной оценки стандартной неопределенности $u_0(y)$, которое получают в следующем разделе. Если выполняется неравенство:

$$|\Delta(y)| \geq \frac{1}{3} u_0(y), \quad (B7)$$

необходимо учитывать смещение $\Delta(y)$ в качестве поправки к y (8), получая несмещенную оценку измеряемой величины по формуле:

$$y_0 = y - \Delta(y). \quad (B8)$$

Учет смещения стандартной неопределенности измеряемой величины при нелинейном модельном уравнении

Смещение оценки стандартной неопределенности измеряемой величины вычисляется по формуле [7]:

$$\Delta(u^2) = \left[\frac{1}{4} \sum_{i=1}^N c_{ii}^2 (\eta_i + 2) u_i^4 + \sum_{i=2}^N \sum_{j=1}^i c_{ij}^2 u_i^2 u_j^2 \right], \quad (C1)$$

где η_i – эксцесс распределения i -й входной величины, который берут из табл. 3.

Полученное значение смещения сравнивают со значением $u^2(y)$. Если выполняется неравенство:

$$|\Delta(u^2)| \geq \frac{1}{9} u^2(y), \quad (C2)$$

необходимо учитывать смещение $\Delta(u^2)$ в качестве поправки к $u^2(y)$, получая несмещенную оценку стандартной неопределенности измеряемой величины по формуле:

$$u_0^2(y) = u^2(y) + \Delta(u^2). \quad (C3)$$

Для облегчения вычислений по формулам (C1)-(C3) целесообразно воспользоваться методом частных приращений.

В этом случае разностная частная производная первого порядка измеряемой величины по j -й входной величине будет равна:

$$c_j^* = \frac{f[x_1, \dots, (x_j + u_j), \dots, x_N] - f[x_1, \dots, (x_j - u_j), \dots, x_N]}{2u_j}. \quad (C4)$$

Разностная частная производная второго порядка измеряемой величины по j -й входной величине будет равна:

$$c_{jj}^* = \frac{1}{u_j^2} \{ f[x_1, \dots, (x_j + u_j), \dots, x_N] - 2f(x_1, x_2, \dots, x_N) + f[x_1, \dots, (x_j - u_j), \dots, x_N] \}. \quad (C5)$$

Разностная смешанная частная производная второго порядка измеряемой величины по j -й и i -й входным величинам будет равна:

$$c_{ji}^* = \frac{1}{4u_j u_i} \{ f[x_1, \dots, (x_j + u_j), \dots, (x_i + u_i), \dots, x_N] - f[x_1, \dots, (x_j + u_j), \dots, (x_i - u_i), \dots, x_N] - f[x_1, \dots, (x_j - u_j), \dots, (x_i + u_i), \dots, x_N] + f[x_1, \dots, (x_j - u_j), \dots, (x_i - u_i), \dots, x_N] \}. \quad (C6)$$

Коэффициенты Стьюдента для числа степеней свободы ν и вероятностей 0,95 и 0,9545

ν	0,95	0,9545	ν	0,95	0,9545	ν	0,95	0,9545	ν	0,95	0,9545
1	12,71	13,97	11	2,20	2,25	21	2,08	2,13	35	2,03	2,07
2	4,30	4,53	12	2,18	2,23	22	2,07	2,12	40	2,02	2,06
3	3,18	3,31	13	2,16	2,21	23	2,07	2,11	45	2,01	2,06
4	2,78	2,87	14	2,14	2,20	24	2,06	2,11	50	2,01	2,05
5	2,57	2,65	15	2,13	2,18	25	2,06	2,11	60	2,00	2,04
6	2,45	2,52	16	2,12	2,17	26	2,06	2,10	70	1,99	2,04
7	2,36	2,43	17	2,11	2,16	27	2,05	2,10	80	1,99	2,03
8	2,31	2,37	18	2,10	2,15	28	2,05	2,09	90	1,99	2,03
9	2,26	2,32	19	2,09	2,14	29	2,05	2,09	100	1,98	2,03
10	2,23	2,28	20	2,09	2,13	30	2,04	2,09	∞	1,96	2,00

**Перечень публикаций с примерами оценивания неопределенности измерений
предлагаемыми методами**

- E1. Zakharov I., Botsiura O., Brikman A., Zakharov O. Evaluation of expanded uncertainty at glass thermometer calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2019, No 4, 23-28. DOI: 10.24027/2306-7039.4.2019.195953.
- E2. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V. Measurement uncertainty evaluation by kurtosis method at calibration of electrical resistance standards using a comparator// Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 1, pp. 12-16. DOI: 10.24027/2306-7039.1.2020.204166.
- E3. Botsiura O.A., Zakharov I.P. Increasing the Reliability of Evaluation of Expanded Uncertainty in Calibration of Measuring Instruments //Measurement Techniques, 2020 Volume: 63, Issue: 6, pp. 414-420. DOI 10.1007/s11018-020-01803-2.
- E4. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Patsenko O.M. Measurement uncertainty evaluation at mass calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 3, pp. 36-41. DOI: 10.24027/2306-7039.3.2020.216839.
- E5. Zakharov I.P., Botsiura O.A., Tsybina I.Yu., Zakharov O.O. Measurement uncertainty evaluation at micrometer calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 3a, pp. 196-201. DOI: 10.24027/2306-7039.3A.2020.220313.
- E6. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V., Fomenko V. Considering of the input quantities distributions in the procedure for measurements uncertainty evaluating on the example of resistance box calibration // Ukrainian Metrological Journal, 2020, No 4, pp. 3-8. DOI: 10.24027/2306-7039.4.2020.224189.
- E7. Zakharov I., Nyezshmakov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of Input Quantities // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 1, pp. 4-8. DOI: <https://doi.org/10.24027/2306-7039.1.2021.228134>.
- E8. Zakharov I., Botsiura O., Nyezshmakov P., Obtaining Uncertainty Estimates Compatible with Estimates of Monte Carlo Method // Measurement-2019: Proceedings of the 12th International Conference, Smolenice, Slovakia, 27-29 May 2019, pp. 47-50.
- E9. Zakharov I.P., Nyezshmakov P.I., Botsiura O.A. Revision of GUM: the suggested algorithm for processing measurement results // 2019 IEEE 8th International Conference on Advanced Optoelectronics and Lasers (CAOL), 6-8 Sept. 2019, Sozopol, Bulgaria, pp. 632 – 635. DOI: 10.1109/CAOL46282.2019.9019421. Electronic ISSN: 2160-1534. Print on Demand(PoD) ISSN: 2160-1518.
- E10. Zakharov I., Botsiura O., Zadorozhna I. Measurement Uncertainty Evaluation at Gauge Block Calibration // 2019 XXIX International Scientific Symposium "Metrology and Metrology Assurance" (MMA), 6-10 Sept. 2019, Sozopol, Bulgaria, pp. 19-22. DOI: 10.1109/MMA.2019.8936023.
- E11. Zakharov I., Nyezshmakov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of Input Quantities // Sensor and Measurement Science International Conference (SMSI 2020), 22-25 June 2020, Nuremberg, Germany, pp. 351-352. DOI 10.5162/SMSI2020/P4.7.
- E12. Zakharov I., Serhienko M., Chunikhina T. Measurement uncertainty evaluation by kurtosis method at calibration of a household water meter // Metrology and Metrology Assurance (MMA-2020): Proceedings of 2020 XXX International Scientific Symposium, Sozopol, Bulgaria, 7-11 Sept. 2020, pp. 83-86. DOI: 10.1109/MMA49863.2020.9254260.

E13. Zakharov I., Botsiura O., Semenikhin V. Method of kurtosis in estimating the measurement uncertainty during evaluation of the electrical resistance measures using a potentiometer // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 2, pp. 30-34. DOI: 10.24027/2306-7039.2.2021.236078.

Литература

1. Guide to the Expression of Uncertainty in Measurement. Geneva, ISO, 1993. 101 p.
2. JCGM 101:2008. Evaluation of measurement data – Supplement 1 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Propagation of distributions using a Monte Carlo method. JCGM, 2008. 90 p.
3. JCGM 102:2011. Evaluation of measurement data – Supplement 2 to the “Guide to the expression of uncertainty in measurement” – Extension to any number of output quantities. JCGM, 2011. 80 p.
4. ISO/IEC 17025:2017. General requirements for the competence of testing and calibration laboratories. CASCO, 2017. 38 p.
5. Bich W., Cox M., Michotte C. Towards a new GUM – an update. Metrologia 53. 2016. S149–S159.
6. Zakharov I., Nyezhamkov P., Botsiura O. Reduction of the measurand estimate bias for nonlinear model equation // Journal of Physics: Conf. Series 1065 (2018) 212002.
7. Zakharov I., Nyezhamkov P., Botsiura O. Reduction of the bias of measurement uncertainty estimates with significant non-linearity of a model equation // Journal of Physics: Conf. Series 1379 (2019) 012013.
8. Zakharov, I.P., Botsyura, O.A. Calculation of Expanded Uncertainty in Measurements Using the Kurtosis Method when Implementing a Bayesian Approach // Measurement Techniques, 2019, Volume: 62, Issue: 4, pp. 327-331.
9. Zakharov I., Nyezhamkov P., Botsiura O. Expanded Uncertainty Evaluation Taking into Account the Correlation Between Estimates of Input Quantities // Ukrainian Metrological Journal, 2021, No 1, pp. 4-8.
10. Zakharov I., Botsyura O. Estimation of expanded uncertainty in measurement when implementing a Bayesian approach // Measurement Techniques, 2018, Volume: 61, Issue: 4, pp. 342-346.

Информационные данные

1. Координатор разработки: ННЦ "Институт метрологии", Украина;
2. Тема KOOMET: 796/UA/19 (координатор проекта – И.П. Захаров);
3. Рекомендация утверждена на 33-м заседании Комитета KOOMET.
4. Сведения о применении публикации странами-участницами KOOMET:
Беларусь